Απειροστικός Λογισμός ΙΙ 21/03/2019

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: $f: [\alpha,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\{x_n\}, \{y_n\}$ ακολουθίες από το $[\alpha,b]$ τ.ω. $x_n - y_n \to 0$ <u>Προηγούμενη φορά</u>: $\exists \{k_n\}$ υπακολουθία της $\{n\}$ τ.ω. $f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to 0$

$\exists \{f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})\}$ της $\{f(x_n) - f(y_n)\}$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ: (Απ1)</u>: Αν $\{z_n\}$ φραγμένη ακολουθία τότε $\{z_n\}$ συγκλίνει αν-αν κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο.

- Η ακολουθία $\{f(x_n) - f(y_n)\}$ είναι φραγμένη επειδή

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n) \leq \max f(x) = M \quad x \in [\alpha, b] \\ f(y_n) \geq \min f(x) = m \quad x \in [\alpha, b] \end{array}\right\} f(x_n) - f(y_n) \leq 2M$$

Έστω $\{f(x_{\ell_n}) - f(y_{\ell_n})\}$ συγκλίνουσα υπακολουθία της $\{f(x_n) - f(y_n)\}$

Γνωρίζω ότι $x_{\ell_n} - y_{\ell_n} \to 0 \xrightarrow[\text{φορά}]{\text{Προηγ.}} \exists$ υπακολουθία της

$\{f(x_{\ell_n}) - f(y_{\ell_n})\}$ που να συγκλίνει στο $0 \xrightarrow{\text{πρόταση}} \{f(x_{\ell_n}) - f(y_{\ell_n})\}$

$\to 0 \xrightarrow{\text{πρόταση}} \{f(x_n) - f(y_n)\}$ συγκλίνει στο 0

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Τότε αν $\{x_n\}$ συγκλίνει $\Rightarrow \{f(x_n)\}$ συγκλίνει

$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$ $\quad f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in (0,1]$

<u>Απόδειξη</u>: η $\{x_n\}$ είναι Cauchy $\Rightarrow$ Αν $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall m,n \geq n_0$ να ισχύει $|x_n - x_m| < \varepsilon'$

- f ομοιόμορφα συνεχής: Έστω $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω. $\forall x,y \in A$ με $|x-y| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

για $\varepsilon' = \delta = \delta(\varepsilon)$: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m,n \geq n_0$, $|x_m - x_n| < \delta$

$\Rightarrow \forall m,n \geq n_0$, $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\}$ Cauchy

$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ συγκλίνει

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω $f:(\alpha,b) \to \mathbb{R}$: συνεχής. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν-αν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.

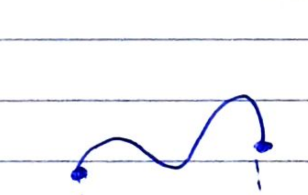
<u>Αποδ</u> "$\Rightarrow$" Έστω ότι f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\{x_n\}, \{y_n\}$ δύο ακολουθίες από το (α, b) τ.ω $x_n, y_n \to a$
$\Rightarrow x_n - y_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0$ ①

$\{x_n\}$ συγκλίνει $\xrightarrow[\text{Θεώρημα}]{\text{Προηγ.}}$ $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει $\Rightarrow \exists\, \ell \in \mathbb{R}$

τ.ω $f(x_n) \to \ell$ $\xrightarrow{f(y_n)\to\ell}$ $\forall \{y_n\}$ από το (α,b) τ.ω
$y_n \to a$ έχω $f(y_n) \to \ell \Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Ομοίως, $\lim_{x\to b^-} f(x)$ υπάρχει

Ορίζω την $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (\alpha, b) \\ \lim_{x\to a^+} f(x), & x = a \\ \lim_{x\to b^-} f(x), & x = b \end{cases}$



συνεχής στο $[\alpha, b] \Longrightarrow f$ ομοιόμορφα συνεχής

$\Rightarrow \bar{f}|(\alpha,b) : (\alpha,b) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής
$\parallel$
f

$f: (0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν είναι ομ. συνεχής

$f: [0,1] \to \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
αλλά όχι Lipichitz

$f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$ $0 \le f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{1}{2} \Rightarrow$

f' φραγμένη $\Rightarrow$

f Lipschitz $\Rightarrow$ f ομ. συνεχής

$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι Lipschitz

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Αν η f: είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\alpha,b]$
και f —||— στο $[b,+\infty)$
τότε f —||— στο $[a,+\infty)$

Ομοίως, αν f ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty,\alpha]$ και ομ. συνεχής στο $[\alpha,b)$ τότε η f είναι ομ. συνεχής στο $(-\infty,b]$

f ομ. συνεχής στο $[\alpha,b]$, ομ. συνεχής στο $[b,\gamma)$
Τότε f: ομ. συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$
f ομ. συνεχής στο $[b,\gamma) \Rightarrow \exists$ το $\lim_{x \to \gamma^-} f(x)$

$\Rightarrow f$ ομοιο. συνεχής στο $[a,\gamma]$

(Τετριμμένο, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ υπάρχει γιατί f συνεχής στο a)

Ομοίως αν f ομοιο. συνεχής $(-\infty,a)$ κ' ομ. συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ τότε είναι ομ. συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

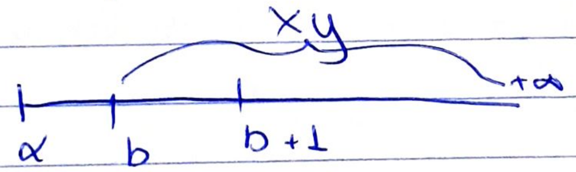
Έστω $\varepsilon>0$

- f είναι ομ. συνεχής στο $[\alpha,b]$ $\exists\, \delta_1>0$ τ.ω
- $\forall\, x,y\in[\alpha,b]$ με $|x-y|<\delta_1$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
- f είναι ομ. συνεχής στο $[b,+\infty)$ $\exists\, \delta_2>0$ τ.ω $\forall x,y\in[b,+\infty)$ με $|x-y|<\delta_2$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
- f είναι ομ. συνεχής στο $[\alpha,b+1]$: $\exists\, \delta_2>0$ τ.ω $\forall x,y\in[\alpha,b+1]$ με $|x-y|<\delta_3$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Θδο f είναι ομ. συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$

Έστω $x,y\in[\alpha,+\infty)$ με $x\neq y$ ΧΒΤΓ $x<y$

Παίρνω $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,1\}$



1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $x,y\in[\alpha,b]$

- Αν $|x-y|=y-x<\delta\leq\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $x,y\in[b,+\infty)$

Αν $|x-y|=y-x<\delta\leq\delta_2 \Rightarrow$ —‖—

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $x\in[\alpha,b]$, $y\in[b,+\infty)$

Αν $|x-y|=y-x<\delta\leq 1 \Rightarrow y\leq b+1$

$\Rightarrow x,y\in[\alpha,b+1]$

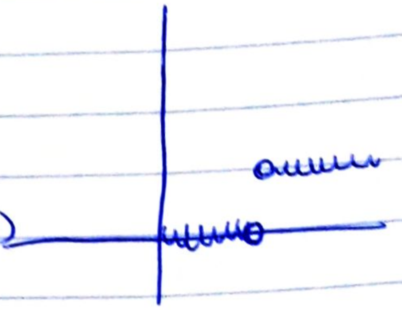
$|x-y| = y-x < \delta \leq \delta_3 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\Rightarrow f$ ομοιόμορφα συνεχής

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $f:[0,1)\cup(1,2]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,1) \\ 1, & x\in(1,2] \end{cases}$$

συνεχής



Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1)$
(γιατί $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ υπάρχει)

Η —||— $(1,2]$ (ομοίως)

Έστω $\{x_n\}, \{y_n\}$ ακολουθίες από το $[0,1)\cup(1,2]$
τω $0<x_n<1$, $1<y_n\leq 2$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και
$x_n, y_n\to 1$ Τότε $x_n-y_n\to 0$
$f(x_n)-f(y_n)=0-1\to -1\neq 0$
$\Rightarrow f$ όχι ομοιόμορφα συνεχής